Линейные модели (часть 1)

Артем Артемов

Outline

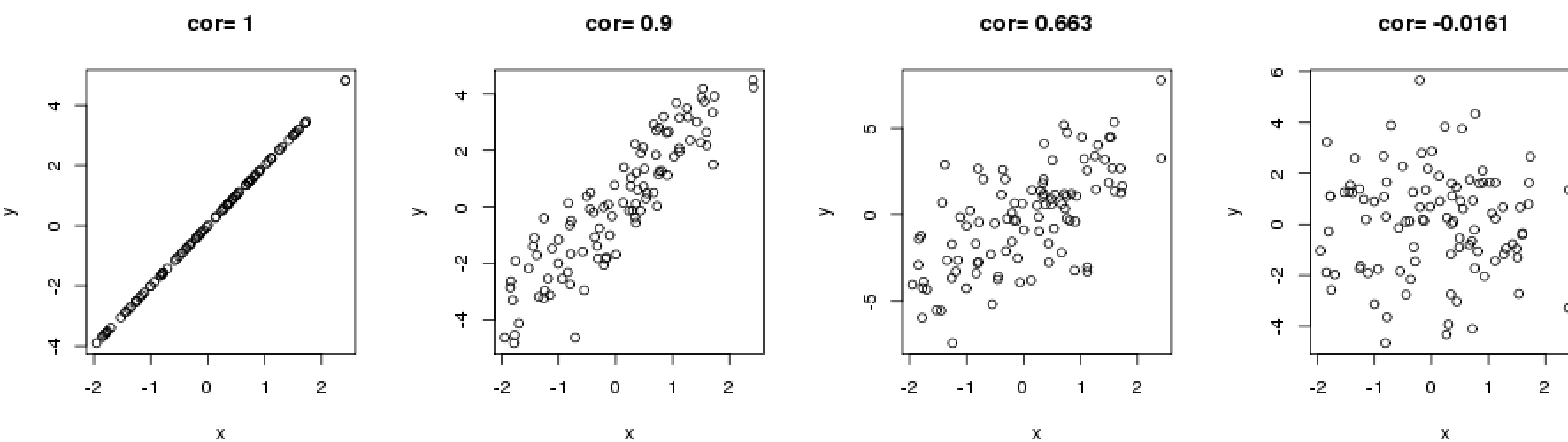
- `lm(y ~ x)`
- Модели с множеством предикторов
  - `lm(y ~ x1 + x2 + x3)`
  - Если *x* – не число, а фактор?
  - Взаимодействия факторов
  - ANOVA
- Предсказания по модели и валидация моделей:
  - Предсказание *y* по $x_1 \ldots x_n$, зная модель
  - Сравнение и валидация моделей, переобученность
- Обобщенные линейные модели (glm)
- Нелинейный метод наименьших квадратов (не lm/glm!)
  - Подбор параметров в формуле по экспериментальным данным

сегодня

Корреляция

- Измеряет линейную зависимость между переменными
- Не означает причинно-следственной связи

```
> cor(x, y)
> cor(x, y, method="spearman")   #ранговая корреляция
> cor(m)
```



Dataset

- Цены на ноутбуки (реальный прайс-лист)
- Что определяет цену, как она зависит от разных параметров?
- Как предсказать цену, зная параметры ноутбука?

```
> laptop=read.csv("laptop_price.csv")
> head(laptop)

  Manufacturer  Model Processor Memory_Gb HDD_Gb HDD_type Price_RUR
1         Acer Aspire  i3-3110M         4    500      HDD     16400
2         Acer Aspire  i3-3120M         4    500      HDD     16500
3         Acer Aspire  i5-3230M         4    500      HDD     18500
4         Acer Aspire      C-70         2    500      HDD     12000
5         Acer Aspire      C-70         2    500      HDD     12000
6         Acer Aspire     1007U         2    500      HDD     11300
7         Acer Aspire  i5-2467M         4    240      SSD     33800

  Screen_size_inch Battery_capacity_mAh   OS      Color
1             15.6                 4400 Win8      black
2             15.6                 4400 Win8      black
3             15.6                 4400 Win8      black
4             11.6                 2500 Win8  turquoise
5             11.6                 2500 Win8      black
6             11.6                 5000 Win8  turquoise
7             13.3                 3260 Win7HP   silver
```

Корреляция

Если на входе – матрица, cor вычисляет корреляции между всеми колонками матрицы

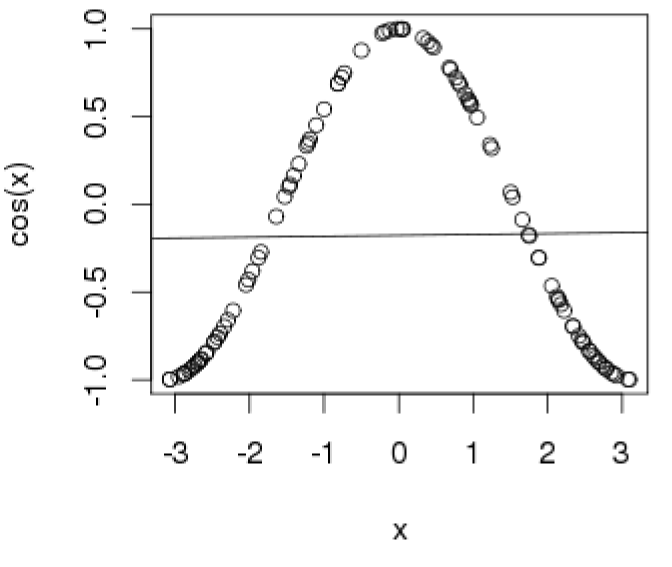
```
> m=as.matrix(laptop[,c("Memory_Gb", "HDD_Gb", "Screen_size_inch", "Battery_capacity_mAh")])
> cor(m)
```

	Memory_Gb	HDD_Gb	Screen_size_inch	Battery_capacity_mAh
Memory_Gb	1.000	**0.6741**	0.5259	0.2282
HDD_Gb	**0.674**	1.0000	0.5156	0.0568
Screen_size_inch	0.526	0.5156	1.0000	-0.0329
Battery_capacity_mAh	0.228	0.0568	-0.0329	1.0000

Корреляция

- Измеряет линейную зависимость между переменными
- Не означает причинно-следственной связи
- Отсутствие корреляции не означает независимость

```
> x=runif( 100, 0-pi, pi )
> plot( x, cos(x) )
> abline( lm( cos(x)~x ) )
> cor( cos(x), x )
[1] 0.0145
```

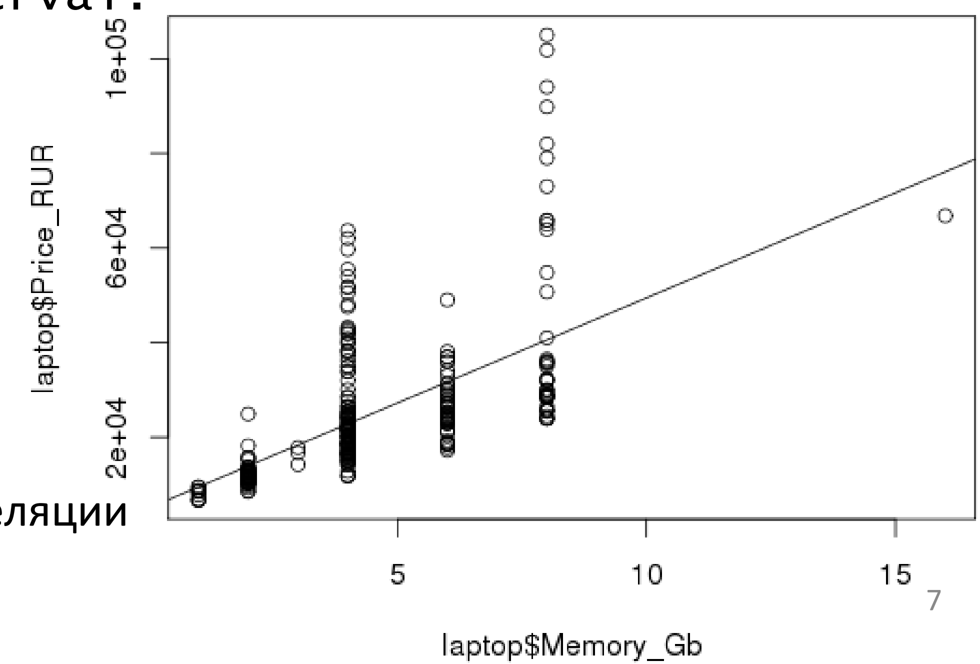


Корреляция

```
> cor.test(laptop$Price_RUR, laptop$Memory_Gb)

   Pearson's product-moment correlation

data:  laptop$Price_RUR and laptop$Memory_Gb
t = 13.3, df = 304, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.532 0.674
sample estimates:
  cor
0.608
```

```
> 0.608^2
[1] 0.37
```

R^2 равен квадрату коэффициента корреляции



Регрессия

Основная идея: наблюдаемые значения зависимой переменной – измерения, которые содержат шум

$$y = f(x, b) + e$$

b_i – параметры модели

x_i – предикторы (независимые переменные)

e – ошибка (все, что мы не можем измерить и учесть в модели)

Мат. ожидание **E[*e*]** = 0

Линейная регрессия

$$y = f(x, b) + e$$

$$f(x, b) = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

b_i – параметры модели

x_i – предикторы (независимые переменные)

e – ошибка (все, что мы не можем измерить и учесть в модели)

e распределено нормально!

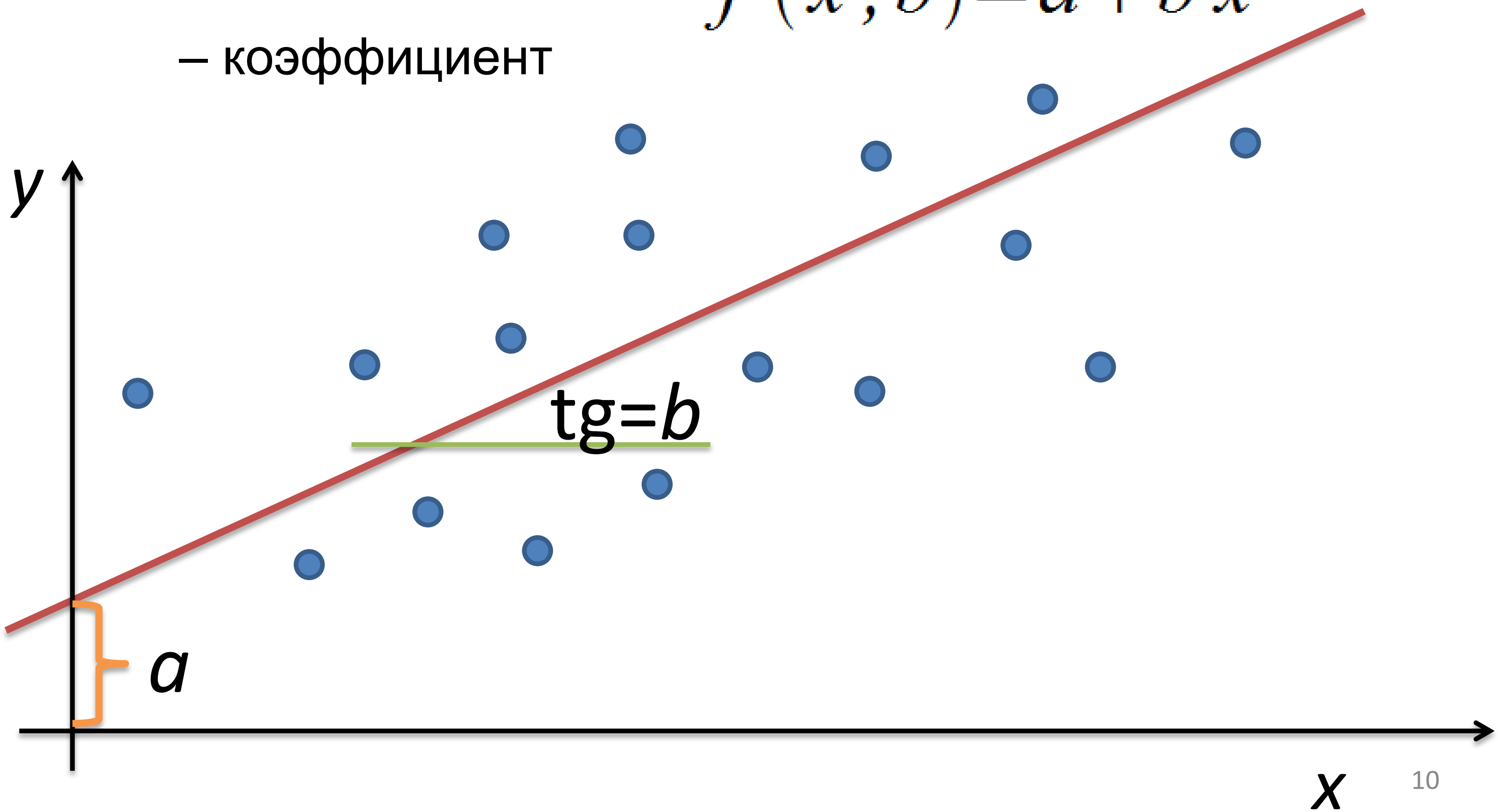
Линейная регрессия с 1 переменной

В случае одной независимой переменной

– константа

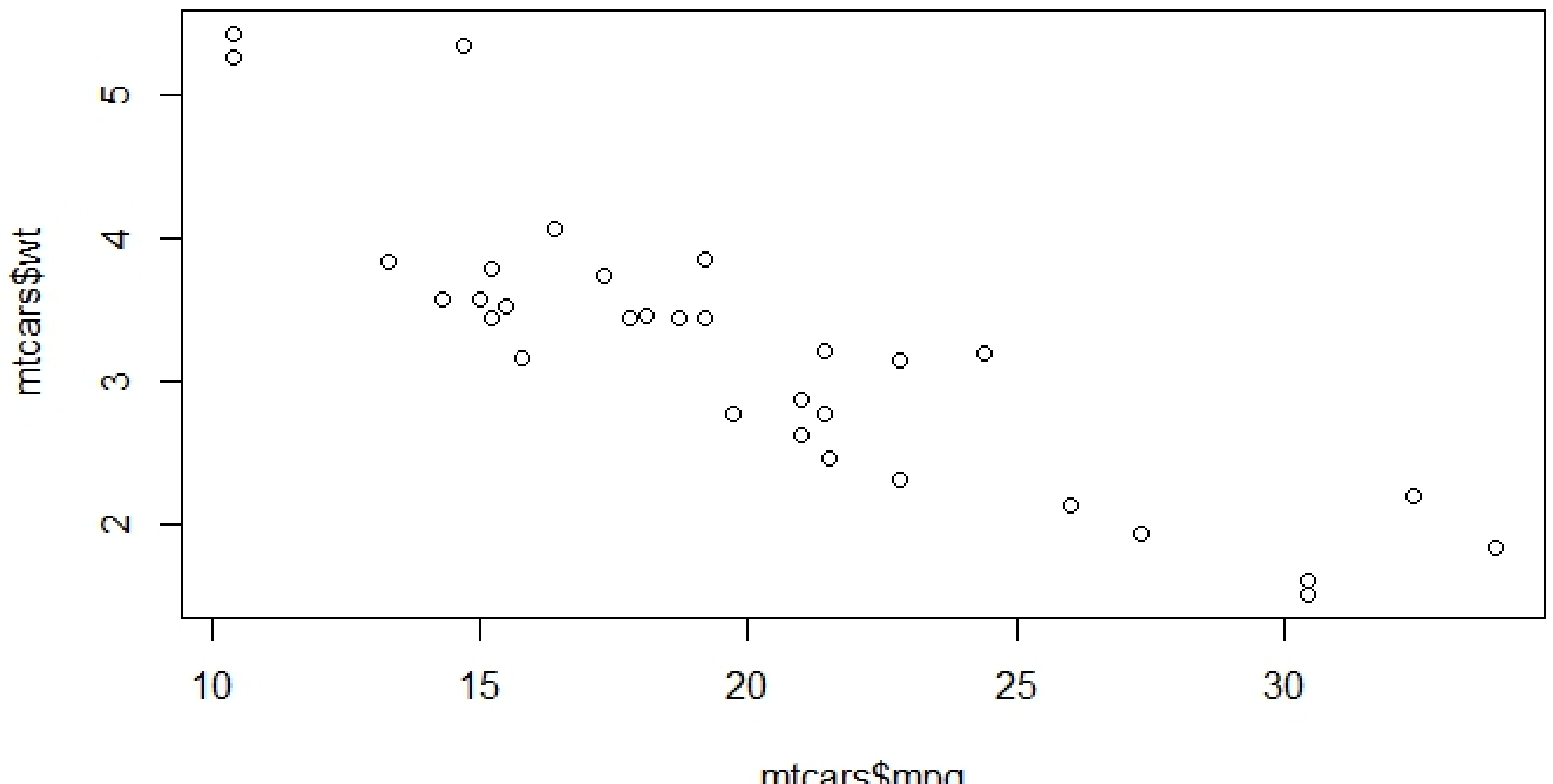
– коэффициент

$$f(x,b) = a + bx$$



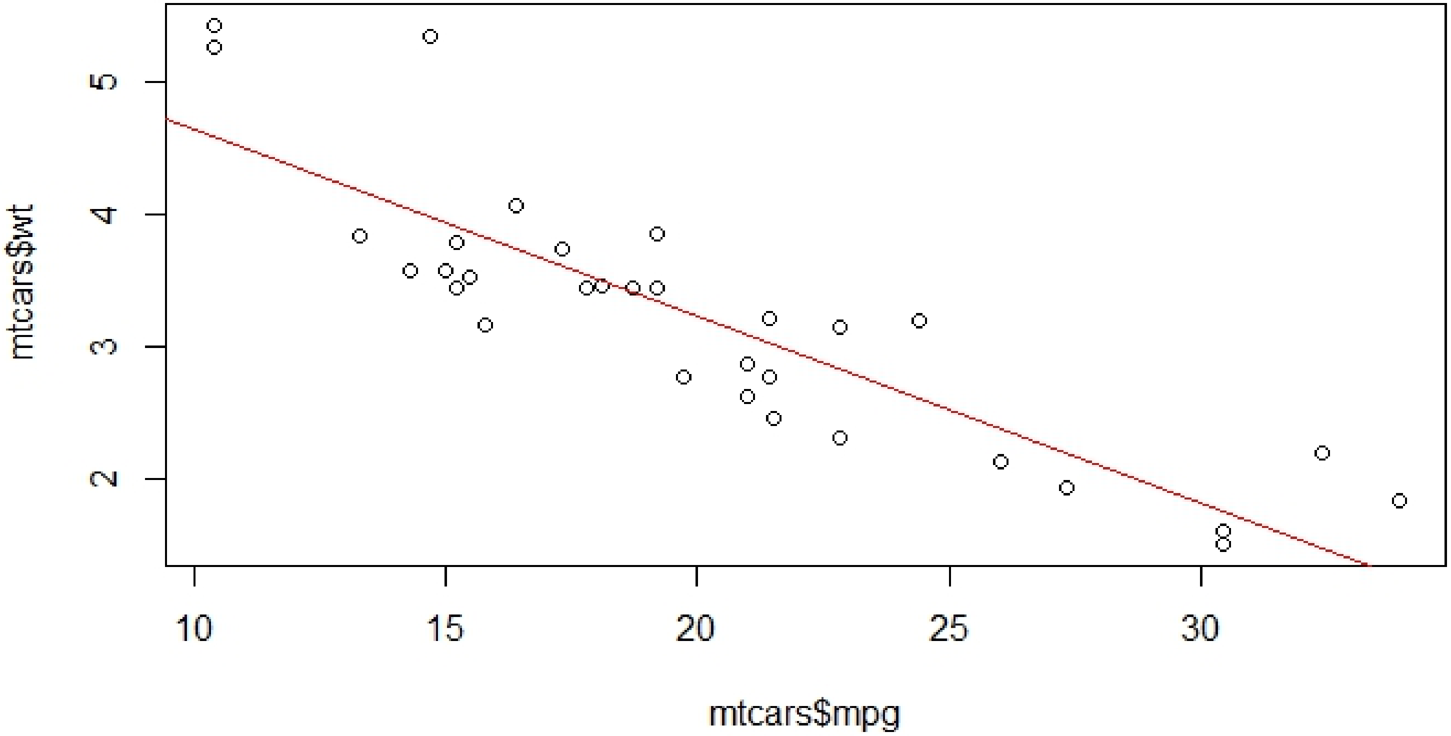
Модель с 1 предиктором. Пример 1

```
> plot(mtcars$mpg, mtcars$wt)
```



Модель с 1 предиктором. Пример 1

```
> plot(mtcars$mpg, mtcars$wt)
> lm1<-lm(mtcars$wt~mtcars$mpg)
> abline(lm1, col='red')
```



Модель с 1 предиктором. Пример 1

```
> lm1<-lm(mtcars$wt~mtcars$mpg)
> lm1

Call:
lm(formula = mtcars$wt ~ mtcars$mpg)

Coefficients:
(Intercept)   mtcars$mpg
     6.0473      -0.1409
```

коэффициент

константа

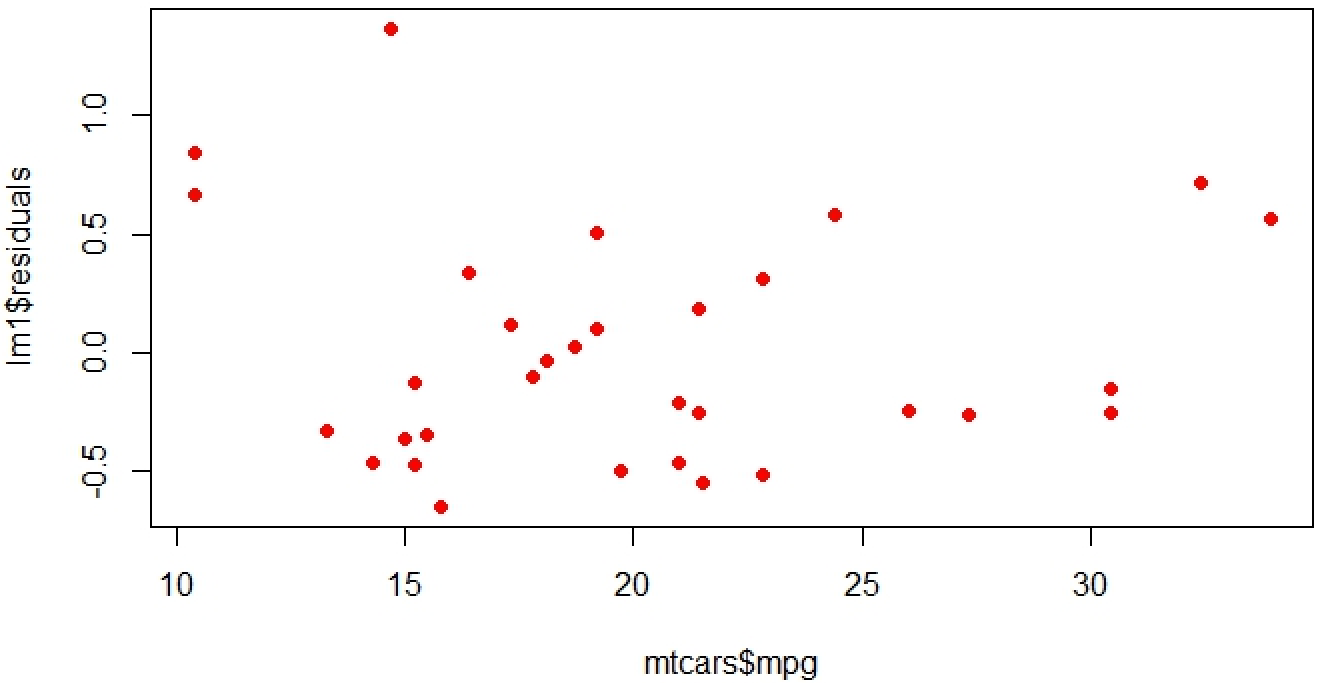
Модель с 1 предиктором. Пример 1

Коэффициенты:

```
> lm1$coefficients
(Intercept)  mtcars$mpg
   6.047255   -0.140862
> lm1$coefficients[1]
(Intercept)
   6.047255
```

Остатки = *y* – предсказанные *y*

```
> plot(mtcars$mpg, lm1$residuals, pch=19,
  col='red')
```



Оценка качества линейной регрессионной модели

```
> summary(lm1)

Call:
lm(formula = mtcars$wt ~ mtcars$mpg)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max
-0.6516 -0.3490 -0.1381  0.3190  1.3684
```

Квантили для остатков
(остаток=отклонение наблюдаемого значения от модели)
В идеале должны быть симметричны относительно 0

Оценка качества линейной регрессионной модели

```
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   6.04726    0.30869  19.590  < 2e-16 ***
mtcars$mpg   -0.14086    0.01474  -9.559 1.29e-10 ***
---
```

оценка параметра

p-value

t-статистика (оценка/стандарная ошибка)

```
Signif. Codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.'
  0.1 ' ' 1
```

Доверительные интервалы для параметров модели

Даем параметру не точечную (одно значение), а интервальную оценку с заданным уровнем надежности. **Такая оценка предпочтительна при небольшом обьеме выборки**

```
> confint(lm1)
> confint(lm1, level=0.95)
                   2.5 %      97.5 %
(Intercept)  5.4168245  6.6776856
mtcars$mpg  -0.1709569 -0.1107671
```

Уровень надежности (95%) означает вероятность того, что значение параметра попадет в этот интервал.

Немного теории

- Есть вариация (=дисперсия) в *y*, которую пытаемся объяснить дисперсией в *x*. *SST* (=SS_{total})
- По *x* можно предсказать y_{pred}. Если x – фактор, то y_{pred} – просто среднее по группе.
- Вариация y_{pred} – вариация *y*, объясненная иксом. SSX (=$SS_{explained\_by\_X}$)
- SST=SSX+SSE

$$y = f(x, b) + e$$

$$F = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_{\text{Error}}} = \frac{SS_{\text{Treatments}}/(I-1)}{SS_{\text{Error}}/(n_T - I)}$$

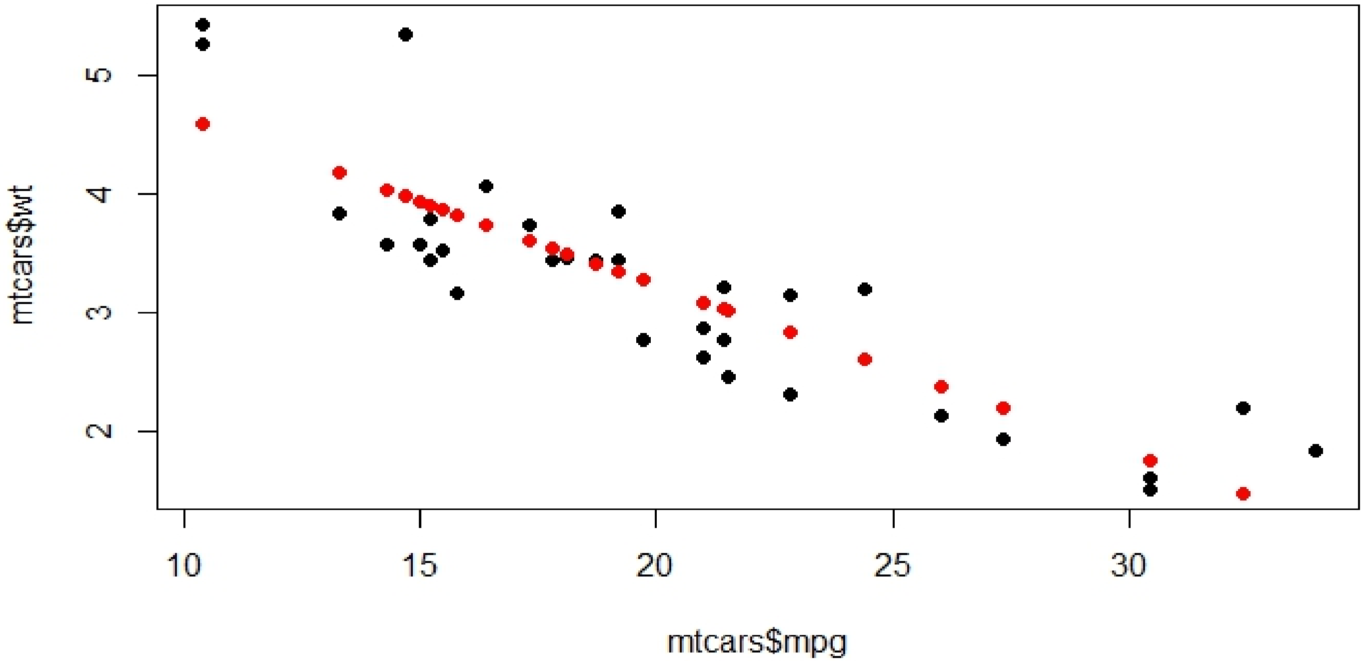
- R^2=SSX/SST

I уровней фактора

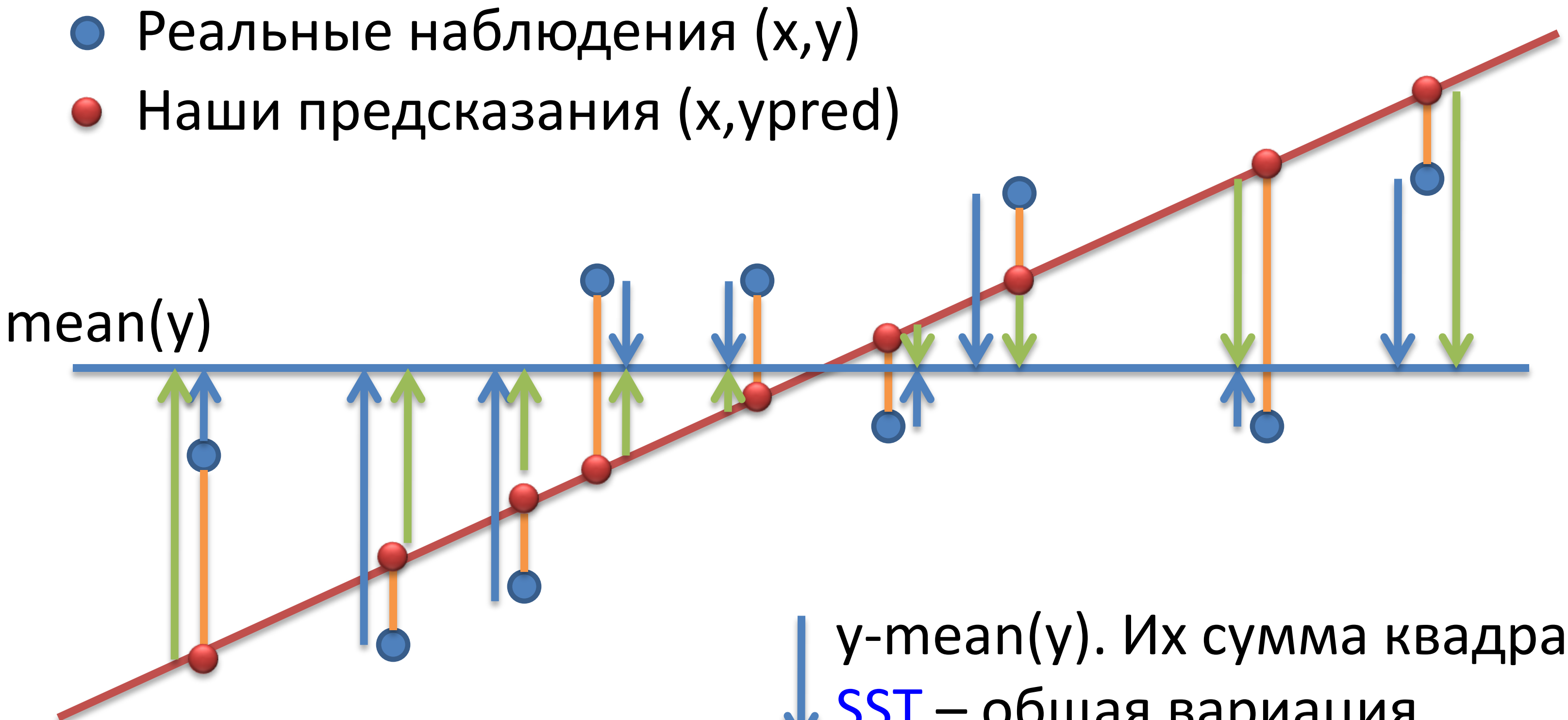
n_T всего точек

Предсказания модели = fitted values

```
> plot(mtcars$mpg, mtcars$wt, pch=19)
> lm1<-lm(mtcars$wt~mtcars$mpg)
> points(mtcars$mpg, lm1$fitted, pch=19,
  col='red')
```



SST = SSX + SSE



y-mean(y). Их сумма квадратов
SST – общая вариация

y-ypred. Ошибки.
SSE – необъясненная вариация

ypred-mean(y). Ошибки.
SSX – объясненная вариация

- R^2=SSX/SST
- F=(SSX)/
- /(SSE/(npoints-nlevels))

Оценка качества линейной регрессионной модели

Доля объясненной дисперсии (чем ближе к 1, тем лучше)

> summary(lm1)

...

$$R^2 = \frac{Var(\hat{Y})}{Var(Y)} = SSX/SST$$

```
Multiple R-squared: 0.7528,   Adjusted R-
  squared: 0.7446
F-statistic: 91.38 on 1 and 30 DF,  p-value:
  1.294e-10
```

F-статистика (отношение объясненной дисперсии к ошибочной)

P-value для всей модели

$$F = \frac{Var(\hat{Y})}{Var(error)} = (SSX)/(SSE/(npoints-nlevels))$$

Построение модели с несколькими предикторами

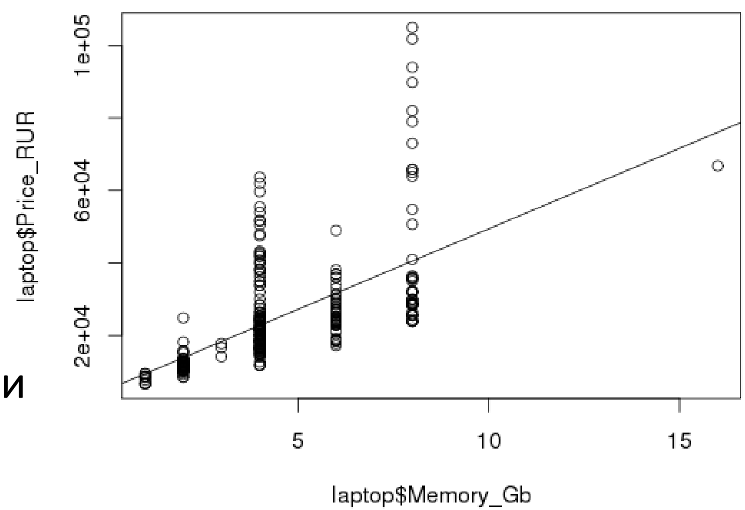
Шаг 1. Модель с 1 предиктором

```
> L_M=lm(Price_RUR ~ Memory_Gb, data=laptop)
> summary(L_M)
…
Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)     5023       1651    3.04   0.0026 **
Memory_Gb       4442        333   13.34   <2e-16 ***
…
Residual standard error: 12300 on 304 degrees of
  freedom
Multiple R-squared: 0.369,   Adjusted R-squared: 0.367

F-statistic:  178 on 1 and 304 DF,  p-value: <2e-16
```

Корреляция и регрессия

```
> cor.test(laptop$Price_RUR, laptop$Memory_Gb)

   Pearson's product-moment correlation

data:  laptop$Price_RUR and laptop$Memory_Gb
t = 13.3, df = 304, p-value < 2.2e-16
alternative hypothesis: true correlation is not equal to 0
95 percent confidence interval:
 0.532 0.674
sample estimates:
  cor
0.608

> 0.608^2
[1] 0.37
```

R2 равен квадрату коэффициента корреляции



Несколько предикторов

- Как цена ноутбука зависит от объема памяти, объема жесткого диска и размера дисплея?
- Предикторы разделены через **+**

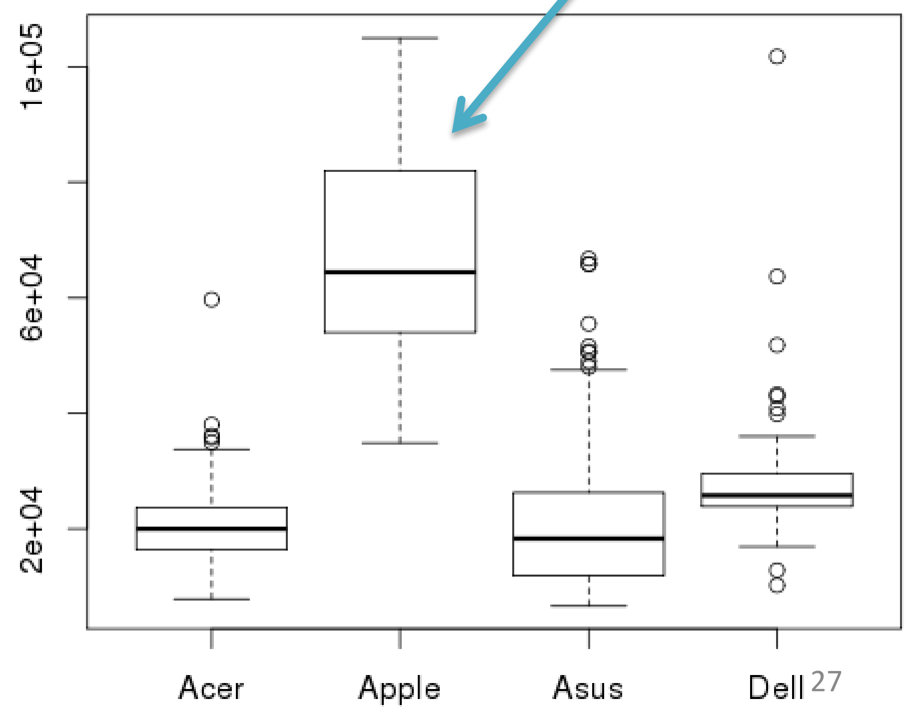
```
> l_MSH=lm(Price_RUR ~ Memory_Gb + Screen_size_inch +
  HDD_Gb, data=laptop)
> summary(l_MSH)
Coefficients:
                  Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      16475.481   4437.238   3.713 0.000244 ***
Memory_Gb         7266.167    406.667  17.868  < 2e-16 ***
Screen_size_inch  -511.390    350.186  -1.460 0.145237
HDD_Gb             -31.022      3.305  -9.387  < 2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 10650 on 302 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5308,   Adjusted R-squared: 0.5262
F-statistic: 113.9 on 3 and 302 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Если x – фактор? Пример

- Уже умеем искать значимые отличия при разных уровней факторов

```
> boxplot(Price_RUR ~ Manufacturer,
  data=laptop)
```

Guess who



Верно ли, что для хотя бы одного уровня фактора наблюдаем отличия?

Если x – фактор? Модель

- Почему одна переменная превратилась в несколько?

```
> L_M=lm(Price_RUR ~ Manufacturer,
data=laptop)
> summary(L_M)
Coefficients:
                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)          21198.6     1415.0  14.981  < 2e-16 ***
ManufacturerApple    46078.5     3527.5  13.063  < 2e-16 ***
ManufacturerAsus       206.2     1714.4   0.120 0.904357
ManufacturerDell      7427.6     2079.1   3.573 0.000411 ***
---
Residual standard error: 12090 on 302 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.3958,      Adjusted R-squared:
0.3898
F-statistic: 65.95 on 3 and 302 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Если x – фактор?

- Влияет ли цвет ноутбука на его цену?
- Модель, если x – число: $y_i = \alpha\, x_{1i} + \beta\, x_{2i} + \varepsilon_i$
- Если x – фактор, то такая запись не подходит. Вместо этого:

$$y_i = \alpha_1\, I(x_{1i}{=}{=}black) + \alpha_2\, I(x_{1i}{=}{=}white) + \ldots + \varepsilon_i$$

Индикатор (равен 1, если x – черный цвет, иначе 0)

Коэффициент
(подбираются при построении модели)

Если две факторные переменные?

$$y_i = \alpha_1\, I(x_{1i}{=}{=}black) + \alpha_2\, I(x_{1i}{=}{=}white) + \ldots +$$

$$+ \beta_1\, I(x_{2i}{=}{=}Apple) + \beta_2\, I(x_{2i}{=}{=}ASUS) + \ldots + \varepsilon_i$$

Числа + факторы

- Шаг 1. Как зависит цена ноутбука от размера жесткого диска?

#Постоим lm с 1 переменной

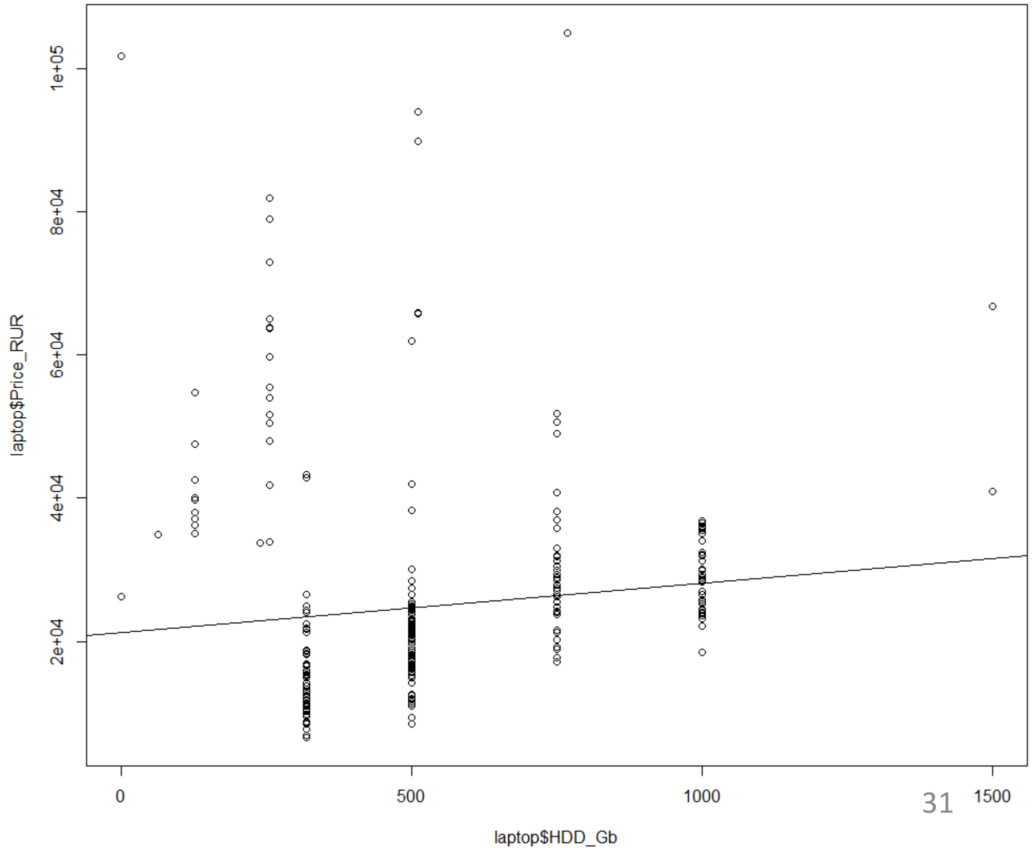
```
> l1=lm(Price_RUR ~ HDD_Gb, data=laptop)
> summary(l1)
...
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 21238.584   2027.553  10.475   <2e-16 ***
HDD_Gb          6.913      3.410   2.027   0.0435 *
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
…
```

#0.043 – на грани порога значимости

Числа + факторы

#Нарисуем scatterplot

```
> plot(laptop$HDD_Gb, laptop$Price_RUR)
> abline(l1)
```



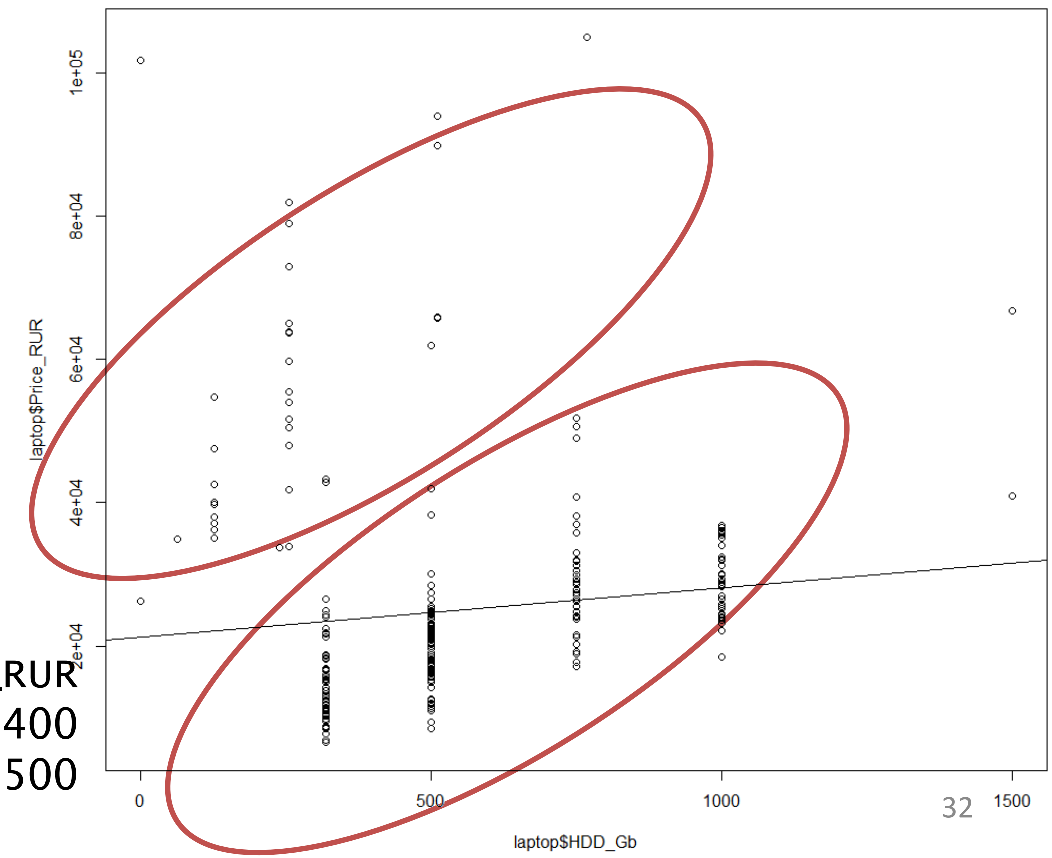
Числа + факторы

#Нарисуем scatterplot

```
> plot(laptop$HDD_Gb, laptop$Price_RUR)
> abline(l1)
```

Видно 2 группы

Это знак, что мы чего-то не учли



Memory_Gb	HDD_Gb	HDD_type	Price_RUR
4	500	HDD	16400
4	500	HDD	18500

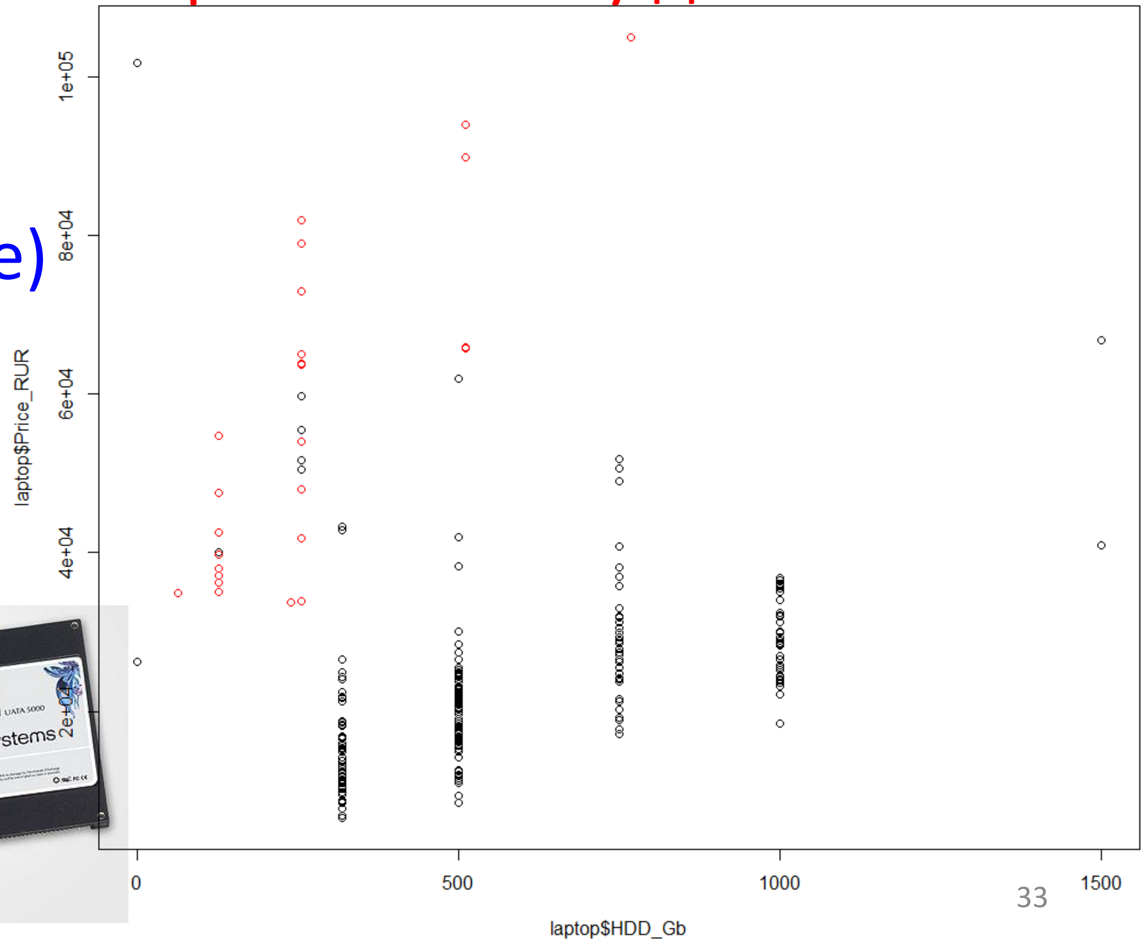
Числа + факторы

Шаг 2. Фактор, который мы не учли – тип накопителя, HDD или SSD. Вторые сильно дороже

Нарисуем scatterplot и покрасим по типу диска

```
> plot(laptop$HDD_Gb,
  laptop$Price_RUR,
  col=laptop$HDD_type)
```

Похоже, мы правы



Числа + факторы

#Добавим тип диска как переменную в модель

```
> l2=lm(Price_RUR ~ HDD_Gb + HDD_type, data=laptop)
> summary(l2)
…
Coefficients:
             Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept) 10741.160   1594.347   6.737 8.14e-11 ***
HDD_Gb         20.290      2.591   7.830 8.27e-14 ***
HDD_typeSSD 40797.575   2442.199  16.705  < 2e-16 ***
…
```

Значимость улучшилась

Наклон прямой будет одинаковым, но среднее между группами - отличается

Числа + факторы

#Нарисуем scatterplot и две регрессионные прямые (для каждого значения фактора)

```
> l2$coeff
(Intercept)      HDD_Gb  HDD_typeSSD
10741.15975    20.28962  40797.57542
```

```
> plot(laptop$HDD_Gb,
  laptop$Price_RUR,
  col=laptop$HDD_type)

> abline(l2$coeff[1], l2$coeff[2],
  col="black")

> abline(l2$coeff[1]+l2$coeff[3],
  l2$coeff[2], col="red")
```

Price=10741+20**HDD_Gb*+40797*I(*type*=SSD)

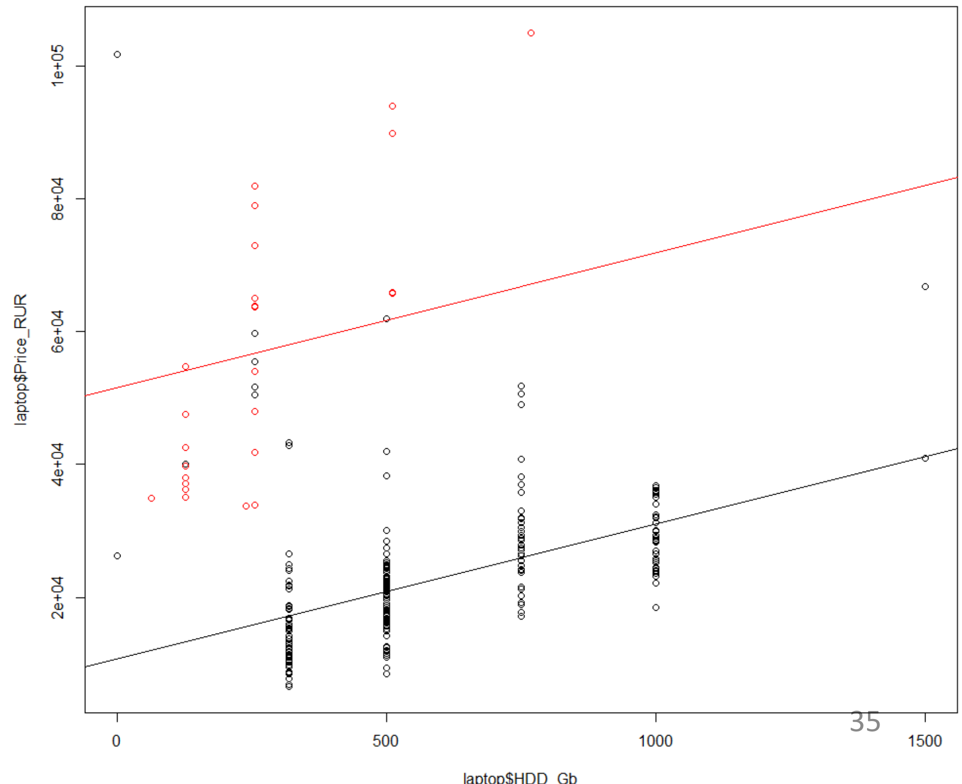
if *type*≠SSD:

Price=10741+20**HDD_Gb*+~~40797*0~~

if *type*=SSD:

Price=10741+20**HDD_Gb*+40797*1

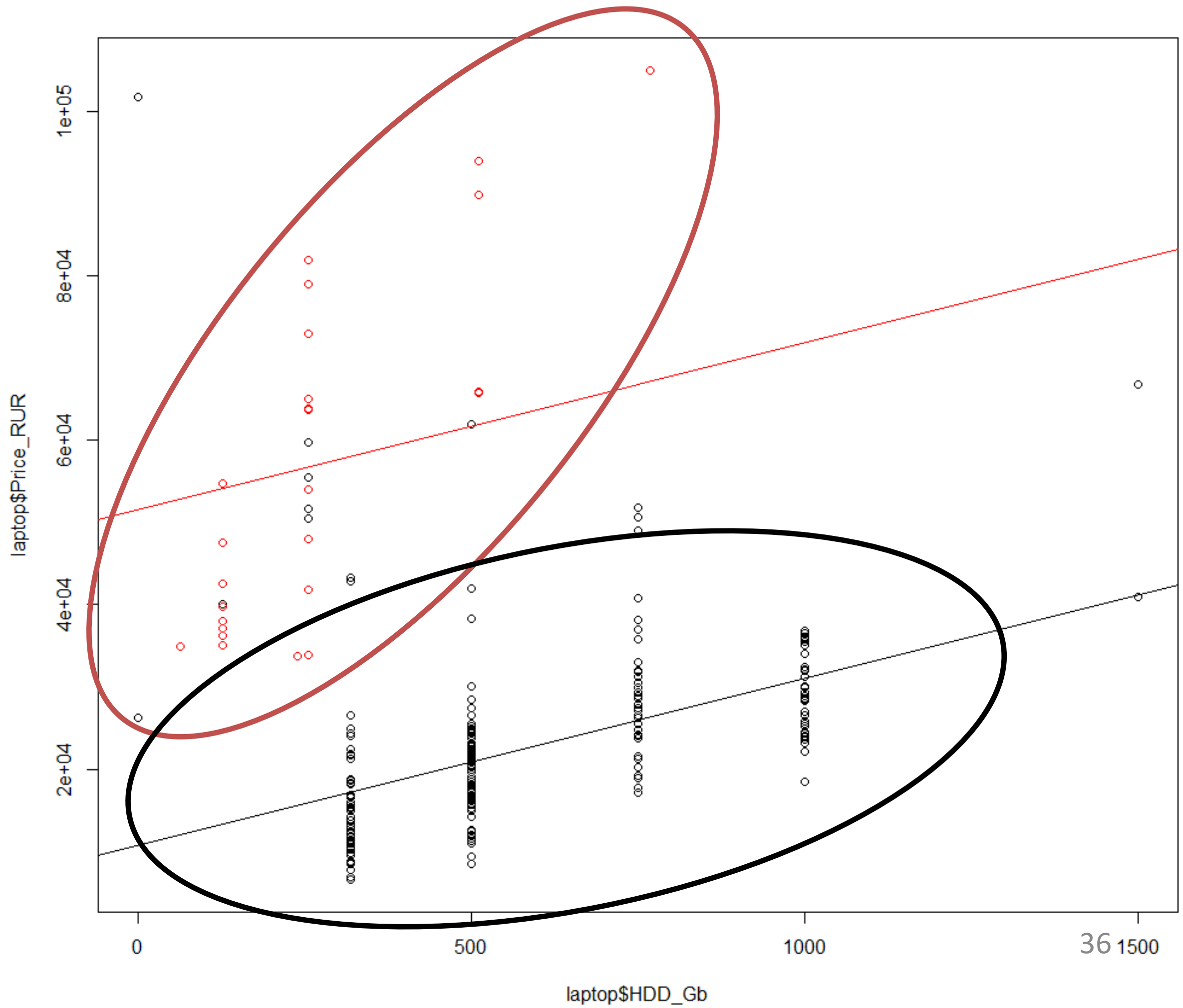
=(10741+40797)+20**HDD_Gb*



Числа + факторы. Взаимодействие переменных

Шаг 3.

- Похоже, что наклоны для двух групп тоже отличаются, другими словами, каждый 1Gb SSD стоит дороже каждого 1Gb HDD.
- Как это учесть?



Числа + факторы. Взаимодействие переменных

- Как в формуле сделать разные наклоны для разных групп факторов?
- Было: *Price*=a+b**HDD_Gb*+c*I(*type*=SSD)
- Надо:

Price=a+

+(b1*I(*type*=SSD)+b2*I(*type*=HDD))**HDD_Gb*+

+c*I(*type*=SSD)

=a+

+(b1*I(*type*=SSD)+b2(1-I(*type*=SSD)))**HDD_Gb*+

+c*I(*type*=SSD)

…преобразуем формулу…

Числа + факторы. Взаимодействие переменных

```
> l3=lm(Price_RUR ~ HDD_Gb + HDD_type + HDD_Gb:HDD_type, data=laptop)
> l3=lm(Price_RUR ~ HDD_Gb*HDD_type , data=laptop)
> summary(l3)
```

Эквивалентные записи:

a*b := a + b + a:b

```
Call:
lm(formula = Price_RUR ~ HDD_Gb * HDD_type, data = laptop)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max 
-21886  -6049  -1461   2885  89344 

Coefficients:
                    Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)        12430.529   1525.776   8.147 9.97e-15 ***
HDD_Gb                17.270      2.488   6.941 2.38e-11 ***
HDD_typeSSD        18232.081   4265.934   4.274 2.58e-05 ***
HDD_Gb:HDD_typeSSD    80.870     12.874   6.281 1.17e-09 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 10480 on 302 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.5457,	Adjusted R-squared: 0.5412 
F-statistic: 120.9 on 3 and 302 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Взаимодействие значимо

Числа + факторы. Взаимодействие переменных

```
> l3$coeff
     (Intercept)              HDD_Gb        HDD_typeSSD HDD_Gb:HDD_typeSSD
     12430.52872            17.26953        18232.08144           80.86960
```

Нарисуем регрессионные прямые для каждого из значений факторной переменной

Price=12430+17**HDD_Gb*+18232*I(*type*=SSD)+81**HDD_Gb**I(*type*=SSD)

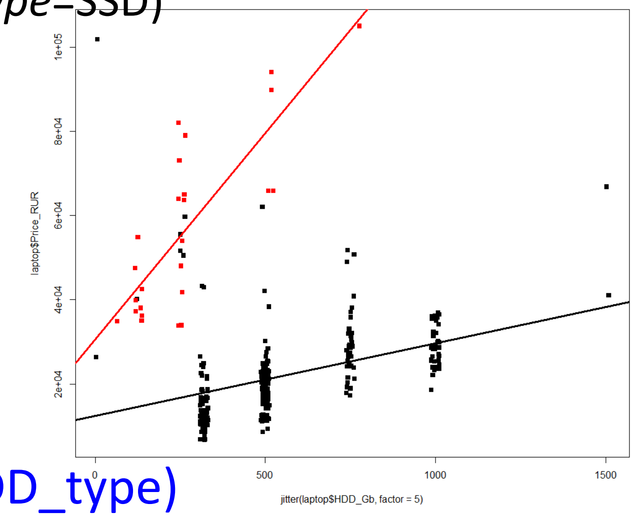
if *type*≠SSD:

Price=12430+17**HDD_Gb*+~~18232*0+81*HDD_Gb*0~~

if *type*=SSD:

Price=12430+17**HDD_Gb*+18232*1+81**HDD_Gb**1=

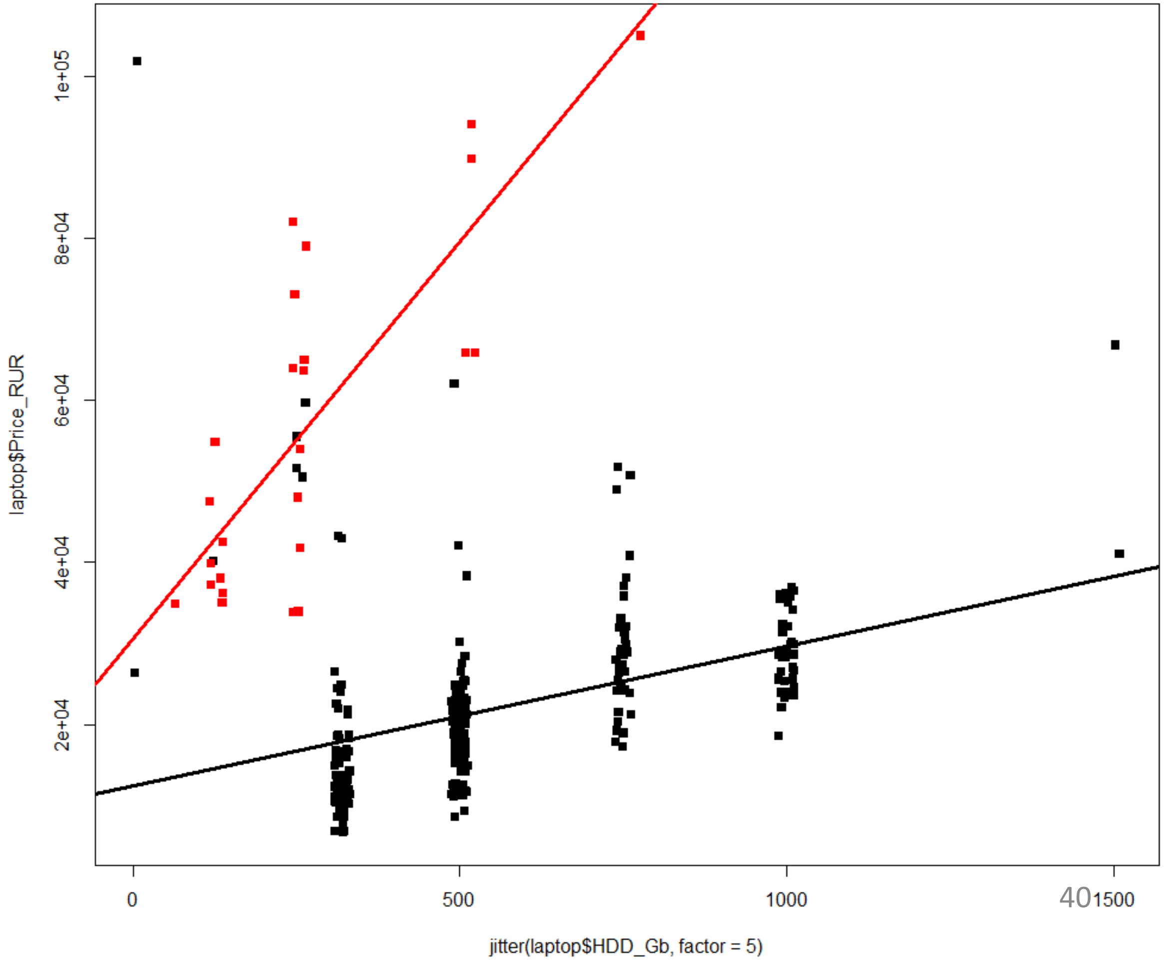
=(12430+18232)+ (17+81)**HDD_Gb*




```
> plot(laptop$HDD_Gb, laptop$Price_RUR, col=laptop$HDD_type)
> abline(l3$coeff[1], l3$coeff[2])
> abline(l3$coeff[1]+l3$coeff[3], l3$coeff[2]+l3$coeff[4], col="red")
```

Числа + факторы. Взаимодействие переменных

```
> plot(laptop$HDD_Gb, laptop$Price_RUR, col=laptop$HDD_type)
> abline(l3$coeff[1], l3$coeff[2])
> abline(l3$coeff[1]+l3$coeff[3], l3$coeff[2]+l3$coeff[4], col="red")
```



Обозначения в формулах

a*b = a + b + a:b

- y ~ x + 0
- y ~ x – 1

– x1 удаляет предиктор x1 из модели

- y ~ a*b – a
- y ~ b + a:b

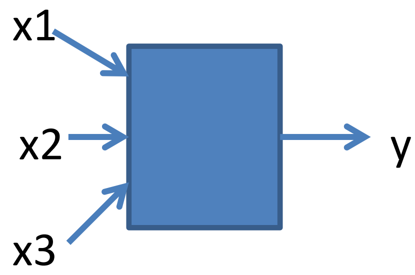
- y ~ .   # . – все остальные переменные

- I(a+b), I(a*b) #защитить арифметические операторы

Для чего нужны линейные модели?

Входные данные

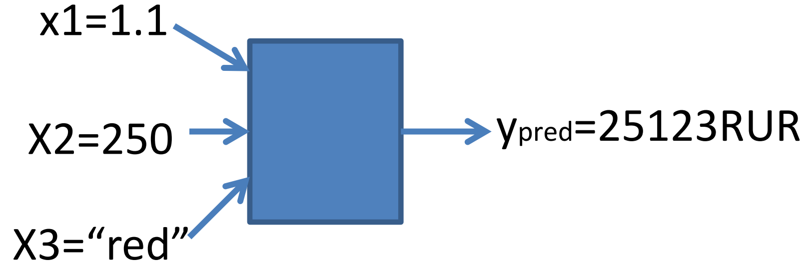
y	x1	x2	x3



Значимость каждой переменной:

```
Coefficients:
                 Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)      9503.178   1733.057   5.483 9.10e-08 ***
Memory_Gb        6232.204    421.098  14.800  < 2e-16 ***
HDD_Gb            -26.604      3.275  -8.123 1.34e-14 ***
Colorblue       -2496.492   4012.744  -0.622   0.5343
…
Colorred         1685.698   2736.167   0.616   0.5383
Colorsilver      8617.956   1679.963   5.130 5.33e-07 ***
…
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 10330 on 289 degrees of freedom
Multiple R-squared: 0.578,      Adjusted R-squared: 0.5547
F-statistic: 24.74 on 16 and 289 DF,  p-value: < 2.2e-16
```

Предсказание *y* по *x*



predict

```
> L3 = lm(formula = Price_RUR ~ HDD_Gb +
  HDD_type + HDD_Gb:HDD_type, data = laptop)
> newlaptops=data.frame( HDD_Gb=c(200, 1000,
  500), HDD_type=c("SSD", "HDD", "HDD"))
> newlaptops
  HDD_Gb HDD_type
1    200      SSD
2   1000      HDD
3    500      HDD

> predict( L3, newlaptops )
       1        2        3
50290.44 29700.06 21065.29
```

Модель

Dataframe с x-координатами новых точек, для которых делается предсказание y. Названия колонок должны соответствовать предикторам модели

Вектор предсказанных значений y

Немного теории

- Есть вариация (=дисперсия) в *y*, которую пытаемся объяснить дисперсией в *x*. *SST (=SS_{total})*
- По *x* можно предсказать y_{pred}. Если x – фактор, то y_{pred} – просто среднее по группе.
- Вариация y_{pred} – вариация *y*, объясненная иксом. SSX (=$SS_{explained\_by\_X}$)
- SST=SSX+SSE

$$F = \frac{MS_{\text{Treatments}}}{MS_{\text{Error}}} = \frac{SS_{\text{Treatments}}/(I-1)}{SS_{\text{Error}}/(n_T - I)}$$

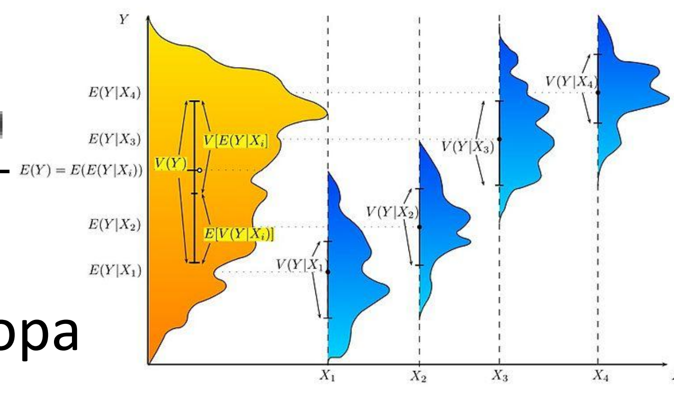


Figure 1: ANOVA : Fair fit

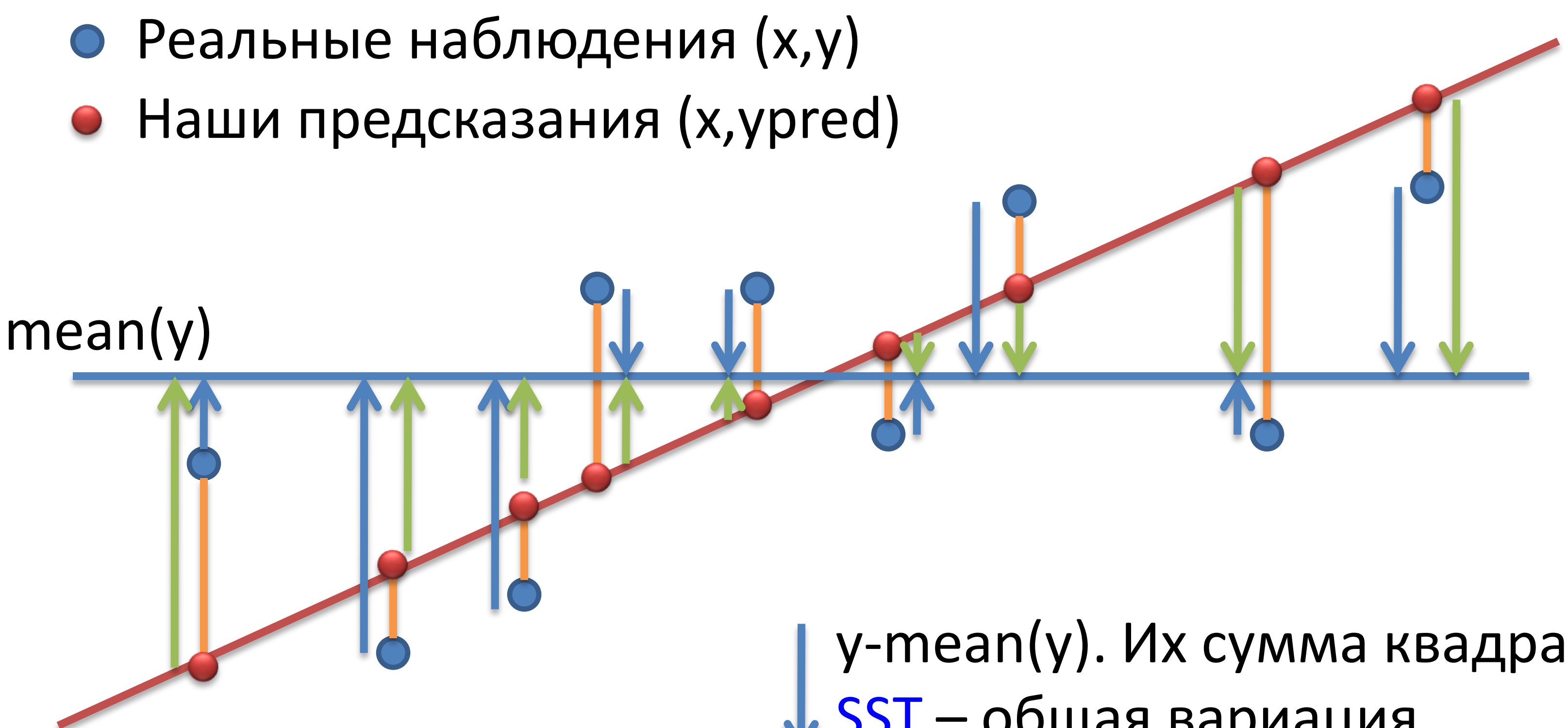
- R^2=SSX/SST

I уровней фактора

n_T всего точек

Wikipedia:ANOVA

SST, SSX, SSE



y-mean(y). Их сумма квадратов
SST – общая вариация

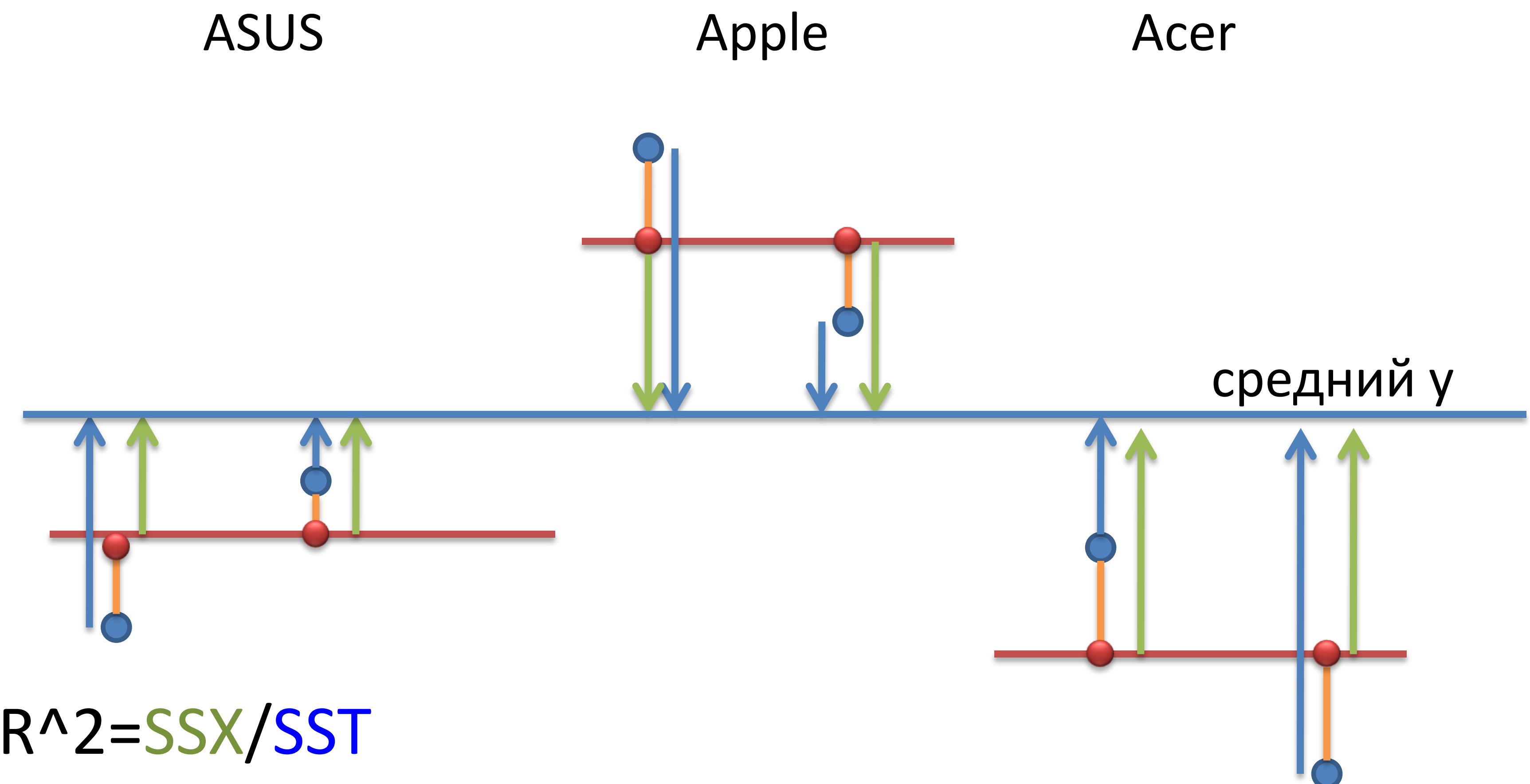
y-ypred. Ошибки.
SSE – необъясненная вариация

ypred-mean(y). Ошибки.
SSX – объясненная вариация

- R^2=SSX/SST
- F=(SSX)/
- /(SSE/(npoints-nlevels))

SST, SSX, SSE для факторного x

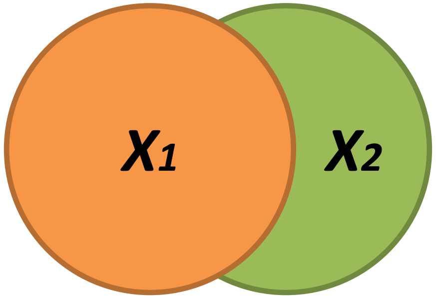
- Если x – фактор, то *ypred* – просто среднее по группе.



- R^2=SSX/SST
- F=(SSX/(nlevels-1))/
- /(SSE/(npoints-nlevels))

ANOVA

```
> l_MC=lm(Price_RUR ~ Manufacturer + Color, data=laptop)
> anova(l_MC)
…
              Df    Sum Sq  Mean Sq F value  Pr(>F)
Manufacturer   3 2.89e+10 9.64e+09    71.1 < 2e-16 ***
Color         14 5.12e+09 3.65e+08     2.7 0.00097 ***
Residuals    288 3.90e+10 1.36e+08

> l_CM=lm(Price_RUR ~ Color + Manufacturer, data=laptop)
> anova(l_CM)
…
              Df    Sum Sq  Mean Sq F value Pr(>F)
Color         14 1.79e+10 1.28e+09    9.45 <2e-16 ***
Manufacturer   3 1.61e+10 5.37e+09   39.61 <2e-16 ***
Residuals    288 3.90e+10 1.36e+08
```

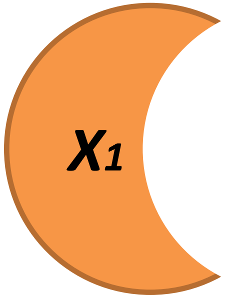


Важен порядок слагаемых! Если предикторы скоррелированы, то часть вариации может объясняться как первой, так и второй переменной. В стандартной ANOVA первая переменная берет на себя пересечение вариаций, следующая – то, что осталось

http://stats.stackexchange.com/questions/20002/regression-vs-anova-discrepancy

summary vs ANOVA

```
> summary(l_MC)
…
Coefficients:
                   Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)           19859       1716   11.58  < 2e-16 ***
ManufacturerApple     39827       3734   10.67  < 2e-16 ***
...
Colorblue             -5318       4567   -1.16  0.24519
...
Colorsilver            7591       1990    3.82  0.00017 ***
> summary(l_CM)
Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)           19859       1716   11.58  < 2e-16 ***
Colorblue             -5318       4567   -1.16  0.24519
...
Colorsilver            7591       1990    3.82  0.00017 ***
...
ManufacturerApple     39827       3734   10.67  < 2e-16 ***
```



Для summary не важен порядок слагаемых. Для каждой переменной Xi t-test-ом оценивает, отличен ли её коэффициент от 0, по соотношению необъясненной и объясненной этим Xi вариации при данных значениях других X.

http://stats.stackexchange.com/questions/20002/regression-vs-anova-discrepancy

Какая из моделей лучше?

- Можно придумать разные модели, одна учитывает объем памяти, другая – ещё объем жесткого диска, третья дополнительно учитывает, является ли диск диском или твердотельным накопителем (SSD).
- Как сравнить, какая лучше?
- Наивный подход: насколько хорошо модель описывает данные ≈ насколько мала необъясненная дисперсия в y ≈ насколько R^2 близок к 1. Не работает, т.к. добавление параметров увеличивает R^2
- Скорректированный R^2 (*adjusted R^2*), информационные критерии (*AIC*, *BIC*)

http://ru.wikipedia.org/wiki/Коэффициент_детерминации

(Конец первой части)