

**Экзаменационная программа курса «Линейная алгебра» для факультета
биоинженерии и биоинформатики МГУ. 1 семестр 2016/2017 учебного года**

Лектор – доцент Чубаров И.А.

1. Системы линейных уравнений. Алгоритм Гаусса упрощения системы линейных уравнений и матрицы. Главные и свободные неизвестные. Разложение общего решения неоднородной системы линейных уравнений в сумму частного решения и общего решения соответствующей однородной системы уравнений.
2. Матрицы. Сложение матриц, умножение матрицы на число, свойства этих операций.
3. Умножение матриц и его свойства. Транспонирование матриц. Транспонирование произведения. Обратная матрица, ее единственность. Обращение произведения.
4. Понятие определителя квадратной матрицы. Перестановки (подстановки), их четность и знак. Определение по формуле полного разворачивания. Основные свойства определителей. Определители диагональной и треугольной матриц.
5. Разложение определителя по строке и столбцу. Фальшивое разложение. Определитель матрицы с углом нулей. Определитель произведения двух квадратных матриц (без доказательства).
6. Исследование квадратной системы линейных уравнений. Формулы Крамера для решения квадратной системы линейных уравнений с ненулевым главным определителем.
7. Критерий существования и формула обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Два способа решения матричных уравнений $AX = B$, $XA = B$ (где $\det A \neq 0$).
8. Векторы на плоскости и в пространстве, линейные операции над ними. Базис, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Разложение вектора по базису на прямой, плоскости и в пространстве.
9. Скалярное произведение двух векторов. Выражение ортогональной проекции одного вектора на другой. Свойства скалярного произведения и его вычисление в координатах. Ортонормированный базис, разложение вектора по ортонормированному базису.
10. Векторное произведение двух векторов, его свойства, выражение в координатах и применения. Критерий коллинеарности двух векторов.
11. Смешанное произведение трех векторов, его свойства, выражение в координатах. Объем ориентированного параллелепипеда. Критерий компланарности (линейной зависимости) трех векторов.
12. Радиус-вектор точки. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении. Декартова система координат. Выражение координат вектора через координаты его конца и начала. Прямоугольная (ортонормированная) декартова система координат. Формула расстояния между двумя точками.
13. Прямая на плоскости. Векторные уравнения прямой на плоскости: параметрическое и нормальное. Уравнения прямой на плоскости в координатах: параметрические, каноническое, через две точки, общее линейное, с угловым коэффициентом. Взаимное расположение двух прямых на плоскости. Вычисление расстояния от точки до прямой, угла между двумя прямыми и расстояния между двумя параллельными прямыми на плоскости.
14. Прямая в пространстве. Векторное параметрическое уравнение прямой. Координатные формы уравнений прямой: параметрические, канонические, по двум точкам. Вычисление угла между двумя прямыми, расстояния от точки до прямой, расстояния между двумя параллельными и скрещивающимися прямыми в пространстве. Задание прямой как линии пересечения двух плоскостей.
15. Плоскость в пространстве. Векторное параметрическое и нормальное уравнения плоскости, уравнение с использованием смешанного произведения. Координатные формы уравнения плоскости: общее, с помощью определителя, через 3 точки. Вычисление угла между двумя плоскостями, расстояния от точки до плоскости, расстояния между параллельными плоскостями. Взаимное расположение двух плоскостей, прямой и плоскости в пространстве.
16. Определение линейного пространства. Примеры. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис, постоянство числа векторов базиса данного пространства, размерность. Координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса.
17. Понятие ранга конечной совокупности векторов (в частности, строк или столбцов). Определение ранга матрицы, ранги по строкам и столбцам. Теорема о ранге матрицы. Вычисление ранга при помощи элементарных преобразований (алгоритм нахождения базисных столбцов). Базисный минор, равенство ранга матрицы порядку ее базисного минора (без доказательства). Критерий равенства определителя нулю.
18. Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений. Общее решение однородной и неоднородной систем линейных уравнений. Критерий совместности

системы линейных уравнений (теорема Кронекера-Капелли) и следствие (условие единственности решения).

19. Подпространства в линейном пространстве. Примеры. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Задание подпространства системой линейных однородных уравнений.
20. Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств. Ядро и образ. Матрица линейного отображения. Матрица линейного оператора и ее изменение при замене базиса. Неизменность определителя матрицы линейного оператора при замене базиса.
21. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен матрицы линейного оператора. Нахождение собственных векторов. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду (необходимое и достаточное условие – существование базиса из собственных векторов; достаточное условие – наличие n различных собственных значений).
22. Евклидово пространство (пространство со скалярным произведением). Неравенство Коши-Буняковского и неравенство треугольника. Определение угла между векторами. Ортонормированный базис, его построение по алгоритму ортогонализации (Грама-Шмидта) с последующим нормированием. Разложение вектора в сумму ортогональной проекции на подпространство и ортогональной составляющей.
23. Билинейные функции (формы), их матрицы и запись в координатах. Изменение матрицы билинейной формы при замене базиса, неизменность ее ранга и знака определителя. Квадратичная форма, отвечающая симметрической билинейной форме. Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа) (можно на примерах).
24. Положительно (отрицательно) определенная квадратичная форма. Исследование знака квадратичной формы по ее каноническому виду. Критерий Сильвестра положительной (без доказательства) и отрицательной определенности квадратичной формы.
25. Линейные операторы в евклидовом пространстве: ортогональные и самосопряженные. Матрицы ортогонального и самосопряженного операторов в ортонормированном базисе. Основная теорема о самосопряженном операторе.
26. Приведение квадратичной формы к главным осям при помощи собственных векторов и ортогональной замены координат (можно на примере). Обзор классификации кривых и поверхностей второго порядка*.

Список литературы.

1. Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. – М., МФТИ, 2006.
2. Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. – М.: Физматлит, 2003 (2011) или СП-б.: Лань, 2008 (2016).
3. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – М.: Физматлит, 2005.
4. Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. – М., МГУ, 2005.
5. Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. Ч. II. Линейная алгебра. – М.: Физматлит, 2000 – 2005.
6. Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003.
7. Резниченко С.В. Аналитическая геометрия в примерах и задачах. – М., МФТИ, 2001.
8. Кряквин В.Д. Линейная алгебра. Пособие к решению задач. – М.: Вузовская книга, 2004.

Примечание. В билете один вопрос и одна задача. Претендующие на 4 или 5 должны доказать хотя бы одну теорему из билета.