Образцы задач к билетам по линейной алгебре (ФББИ, 2015-16)

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1,4,1\}, b\{2,1,3\}, c\{-2,0,3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a, (y,c)=2, (y,b)=9$.
2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p+3q, b = p-2q$, если $|p| = 2, |q| = 3, \angle(p;q) = \pi/3$.
3. Даны вершины треугольника A(–5,3), B(7,8), C(–2,–1). Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. (Система координат ортонормированная)
(Ответ: медиана $x-15y+50=0$, биссектриса $3x+11y-18=0$, высота $x+y+2=0$)
4. Даны точки $E(2,1,0), F(0,2,1), G(1,2,0), H(1,0,-2)$. Найти: (а) объем пирамиды EFGH; (б) длину высоты, проведенной из вершины H, в) расстояние между прямыми (EF) и (GH).
5. Точки A(1,-2,3), B(3,2,1), C(6,4,4) – вершины параллелограмма. Определите координаты его четвертой вершины (найдите все решения).(D_1(4,0,6), D_2(8,9,2), D_3(–5,–4,0)).
6. Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M(1,0,3) и перпендикулярной к плоскостям $x+y+z-8=0,\ 2x-y+4z+5=0$.
7. Докажите, что прямые $\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{1}=\frac{z-5}{4}, \frac{x+5}{2}=\frac{y+8}{3}=\frac{z-4}{-1}$ пересекаются, и составьте уравнение содержащей их плоскости.
8. Точка A лежит на прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{1}$ и удалена от плоскости $x+y+z+3=0$ на расстояние $\sqrt{3}$. Найдите координаты точки A.
9. а) Найдите угол между плоскостью $4x+4y-7z+1=0$ и прямой $\frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{-6}$; б) составьте уравнения ортогональной проекции данной прямой на данную плоскость.
10. Составьте параметрические и канонические уравнения прямой, по которой пересекаются плоскости $x-y+2z-1=0,\ 3x-y+2z+2=0$.
11. Даны прямые $a:\begin{cases} x=5+t \\ y=3-t \\ z=13+t \end{cases}$ и $b:\begin{cases} x=6+t \\ y=1+2t \\ z=10-t \end{cases}$. а) найдите угол между a и b; б)вычислите расстояние между a и b.
12. Найдите матрицу X, удовлетворяющую уравнению $AXB=C$,
где $A=\begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, B=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{Vmatrix}, C=\begin{Vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \end{Vmatrix}$.
13. Найти ранг матрицы, указать базисные столбцы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ и выразить через них остальные столбцы.
14. Найдите ранг матрицы $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & \lambda & 4 & -2 \\ 1+\lambda & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ в зависимости от параметра λ.

15. Найдите собственные значения и собственные векторы (столбцы) линейного оператора, заданного матрицей а) $A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, б) $A=\begin{pmatrix}4 & -3\\ 12 & -8\end{pmatrix}$, в) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$ (при всевозможных значениях параметра). Если возможно, приведите ее к диагональному виду (нужно указать диагональный вид и базис, в котором матрица имеет такой вид).
16. Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix}2 & -1 & 0\\ -1 & 2 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$. Можно ли из них выбрать базис? Если да, указать такой базис и записать в нем матрицу оператора.
17. Решите неравенство $\begin{vmatrix}1 & 2x & 0 & 0 & 0\\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2\\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2\end{vmatrix}>0$.
18. Обратите матрицу $\begin{Vmatrix}0 & 0 & 4 & 5\\ 0 & 0 & 5 & 6\\ -5 & -2 & 0 & 0\\ 7 & 3 & 0 & 0\end{Vmatrix}$.
19. Найти общее решение данной системы уравнений, представить его в виде суммы частного решения и линейной комбинации фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы уравнений: $\begin{cases}x_1-x_2+3x_3+4x_4=0\\ 4x_1-3x_2+x_3+2x_5=1\\ 3x_1-2x_2-2x_3-4x_4+2x_5=1\\ 8x_1-6x_2+2x_3+4x_5=2\end{cases}$.
20. а) Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $a_1=(1,-1,2,1)^T, a_2=(1,2,1,-1)^T, a_3=(0,3,-1,-2)^T, a_4=(3,3,4,-1)^T$ в $\mathbb{R}^4$.
    б) Составить систему однородных линейных уравнений, задающую это подпространство.
21. В базисе e_1, e_2 линейный оператор f имеет матрицу $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & -2\end{pmatrix}$. Найти матрицу этого оператора в базисе $e_1'=e_1-2e_2, e_2'=2e_1+e_2$.
22. Найти матрицу линейного отображения, переводящего векторы $a_1=(-2,1,-1)^T, a_2=(1,-1,3)^T, a_3=(1,2,-1)^T$ соответственно в векторы $b_1=(3,4)^T, b_2=(-2,1)^T, b_3=(1,5)^T$.
23. Вычислить матрицу перехода $C_{e\to e'}$ от базиса $e_1=(-2,1,-1)^T, e_2=(1,-1,3)^T, e_3=(1,2,-1)^T$ к базису $e_1'=(-1,2,3)^T, e_2'=(2,1,2)^T, e_3'=(0,2,1)^T$ в линейном пространстве $\mathbf{R}^3$ и определить координаты вектора $x=-e_1'+3e_2'-e_3'$ в базисе e_1, e_2, e_3.
24. Линейный оператор на двумерной плоскости векторов (приложенных в начале координат) $\mathbb{R}^2$ переводит любой вектор в его ортогональную проекцию на прямую $x+2y=0$. Запишите его матрицу в данном ортонормированном базисе, найдите собственные значения и собственные векторы.
25. Привести квадратичную форму: а) $k=x_1^2-4x_1x_2+4x_1x_3-2x_2^2+8x_2x_3-2x_3^2$;
    б) $k=x_1x_2+4x_1x_3-8x_2x_3$ к каноническому (нормальному) виду методом Лагранжа, определить ее ранг и индексы инерции.

26. Исследовать квадратичную форму на положительную и отрицательную определенность в зависимости от параметра α.: $k = \alpha x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + \alpha x_2^2 + 4x_2x_3 + \alpha x_3^2$
27. Построить при помощи процесса ортогонализации ортонормированный базис линейной оболочки векторов $a_1 = (1,-1,2,1)^T, a_2 = (2,-1,1,2)^T, a_3 = (2,4,-3,1)^T$ (стандартный базис ортонормированный).
28. Найти ортонормированный базис из собственных векторов линейного оператора, заданного в ортонормированном базисе матрицей: а) $A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$, б) $\begin{Vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{Vmatrix}$; привести матрицу к диагональному виду;
29. Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к главным осям (диагональному виду) посредством ортогональной замены координат.